ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΦΥΣΙΚΗΣ

Κωνσταντίνος Σφέτσος, Καθηγητής Φυσικής
Γενικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Πατρών

Διαφορικές εξισώσεις

Περιεχόμενα

- Ορισμοί, ταξινόμιση
- Λύσεις σε κλειστή μορφή
- Λύσεις σε μορφή δυναμοσειράς
- Απλές προσεγγιστικές μέθοδοι
- Ενδεικτικά παραδείγματα

Χρήσιμοι ορισμοί

- Συνήθης Διαφορική Εξίσωση (ΔΕ), τάξεως n ονομάζεται οποιαδήποτε αλγεβρική σχέση της μορφής

$$F(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \ , \quad y^{(i)} = \frac{d^i y}{dx^i} \ , \quad i = 0, 1, \ldots \qquad (1)$$

  (με $y^{(0)} = y$) μεταξύ μιας ανεξάρτησης μεταβλητής x, μιας εξαρτημένης μεταβλητής $y(x)$ και παραγώγων αυτής.
- Η ΔΕ έχει επιλυθεί ή ολοκληρωθεί αν έχει βρεθεί η $y = y(x)$ ή εν γένει η συναρτησιακή σχέση των x και y.
- Έστω ότι η ΔΕ μπορεί να γραφτεί σε ρητή μορφή, δηλαδή με κατάλληλους μετασχηματισμούς μπορεί να γραφτεί ως πολυώνυμο των x και $y(x)$ και των παραγώγων:
  Αν $y^{(n)}$ είναι η υψηλότερης τάξης παράγωγος στη ΔΕ, ο συντελεστής n ονομάζεται τάξη της ΔΕ.

- Η ΔΕ είναι Γραμμική n-οστής τάξεως, αν με κατάλληλους μετασχηματισμούς μπορεί να γραφτεί ως πολυώνυμο ως εξής
$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(i)} = Q(x) \ , \qquad (2)$$
και μή Γραμμική σε κάθε άλλη περίπτωση.
  - Αν $Q(x) = 0$, τότε η ΔΕ λέγεται ομογενής γραμμική ΔΕ.

Απλές τεχνικές επίλυσης

Αν για μία ΔΕ 1ης τάξης της μορφής

$$y'(x)B(x,y) + A(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0 \;, \qquad (3)$$

ισχύει ότι

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \;, \qquad (4)$$

τότε η εξίσωση μπορεί να ολοκληρωθεί.

- Ίσως χρειασθεί να πολλαπλασιάσουμε την (3) με έναν ολοκληρωτικό παράγοντα. Εύχρηστοι κανόνες [Άσκηση]:
  - Αν
    $$\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = Bf(x) \text{ ή } Af(y) \;, \qquad (5)$$
    ο ολοκληρωτικός παράγοντας εξαρτάται απ' το x ή το y.
  - Αν
    $$\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = (xA - yB)f(xy) \;, \qquad (6)$$
    τότε ο ολοκληρωτικός παράγοντας εξαρτάται απ' το xy.

- Θεωρείστε την 1ης τάξεως ΔΕ

$$y' + f(x)y = g(x) \ . \tag{7}$$

Σ′ αυτήν τη περίπτωση ο ολοκληρωτικός παράγων είναι

$$\lambda(x) = e^{\int dx f(x)} \ .$$

Τότε η λύση της (7) είναι

$$y(x) = \frac{1}{\lambda(x)} \left(\int dx g(x) \lambda(x) + C \right) \ . \tag{8}$$

- Μερικές φορές χρειάζεται ένας μετασχηματισμός για να γραμμικοποιηθεί μια ΔΕ. Π.χ η εξίσωση Bernoulli

$$y' + f(x)y = g(x)y^n \ , \tag{9}$$

γραμμικοποιείται αλλάζοντας μεταβλητή ως $u = y^{1-n}$. Τότε παίρνουμε μια ΔΕ της μορφής (7) με

$$f(x) \to (1-n)f(x) \ , \qquad g(x) \to (1-n)g(x) \ . \tag{10}$$

- Μια συνάρτηση n μεταβλητών $f(\mathbf{x})$ ονομάζεται ομογενής βαθμού r αν
$$f(a\mathbf{x}) = a^r f(\mathbf{x}) \ . \tag{11}$$
- Μια ΔΕ της μορφής (3) στην οποία οι συναρτήσεις A και B είναι ομογενής του ιδίου βαθμού ονομάζεται ομογενής ΔΕ.
- Αν αντικαταστήσουμε
$$y(x) = xu(x)$$
και χρησιμοποιήσουμε ότι
$$A(x, xu) = x^r A(1, u) \ , \qquad B(x, xu) = x^r B(1, u) \ ,$$
παίρνουμε την
$$\frac{du}{dt} = -u - \frac{A(1, u)}{B(1, u)} \ , \qquad x = e^t \ , \tag{12}$$
που είναι 1ης τάξης μη γραμμική, εν γένει, ΔΕ.

- Μια γενίκευση είναι η ισοβαρής ΔΕ αν

$$A(ax, a^m y) = a^r A(x, y) \ , \qquad B(ax, a^m y) = a^{r-m+1} B(x, y) \ . \quad (13)$$

- Αντικαθιστώντας

$$y = x^m u \ ,$$

και χρησιμοποιώντας ότι

$$A(x, x^m u) = x^r A(1, u) \ , \qquad B(x, x^m y) = x^{r-m+1} B(1, u) \ ,$$

παίρνουμε την

$$\frac{du}{dt} = -mu - \frac{A(1, u)}{B(1, u)} \ , \qquad x = e^t \ , \quad (14)$$

που είναι 1ης τάξης μη γραμμική, εν γένει, ΔΕ.

Ψάχνοντας για όλες τις λύσεις μιας ΔΕ πρέπει να είμαστε προσεκτικοί ώστε να μην χάσουμε τις μή προφανείς εξ' αυτών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η εξίσωση Clairaut

$$y - xy' = f(y') \ . \tag{15}$$

- Αν την παραγωγίσουμε έχουμε

$$y''[f'(y') + x] = 0 \ .$$

- Η πρώτη δυνατότητα

$$y'' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = ax + f(a) \ , \tag{16}$$

όπου a είναι σταθερά ολοκλήρωσης και όπου η δεύτερη τέτοια σταθερά προσδιορίστηκε αντικαθιστώντας τη λύση στην (15).

- Μια δεύτερη απομονωμένη λύση βγαίνει αν

$$f'(y') + x = 0 \ . \tag{17}$$

Απαλοίφοντας απ΄ αυτή και την (15) την y', βρίσκουμε μια απομονωμένη λύση με μη αυθαίρετες σταθερές.

- Ως παράδειγμα θεωρούμε την $f(z) = z^2$ οπότε έχουμε να επιλύσουμε την

$$y - xy' = y'^2 \ .$$

  - Η λύση που αντιστοιχεί στην (16) είναι

$$y(x) = ax + a^2 \ .$$

  - Απ΄ την (17) έχουμε ότι $y' = -x/2$, οπότε απ΄ την (15) η απομονωμένη λύση είναι η

$$y(x) = -\frac{x^2}{4} \ .$$

Σχόλια για ΔΕ 2ης τάξης

- Η ΔΕ 2ης τάξης της μορφής

$$y'' = f(x, y') \ , \tag{18}$$

με τον μετασχηματισμό $u = y'$, υποβιβάζεται σε 1ης τάξης

$$u' = f(x, u) \ .$$

- Πιο σύνθετες είναι οι περιπτώσεις ΔΕ 2ης τάξης της μορφής

$$y'' = f(y, y') \ . \tag{19}$$

Υποβιβάζονται σε 1ης τάξης με το μετασχηματισμό $u = y'$. Η εξάρτηση απ΄ το x είναι μέσω του y και έχουμε

$$\frac{du}{dx} = f(y, u) = \frac{du}{dy}\ \frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy} \ .$$

Οπότε

$$u\frac{du}{dy} = f(y, u) \ .$$

- Θεωρούμε τη γραμμική ΔΕ 2ης τάξης

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \ , \qquad q(x) \geqslant 0 \ , \quad \forall \ x \ . \qquad (20)$$

Αλλάζοντας μεταβλητή ως

$$z = \int dx \ q^{1/2}(x) \ ,$$

αυτή μετασχηματίζεται στην

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{q'(x) + 2p(x)q(x)}{2q^{3/2}(x)} \frac{dy}{dz} + y = 0 \ .$$

Άρα αν

$$q'(x) + 2p(x)q(x) = \text{σταθερά} \times q^{3/2}(x) \ ,$$

τότε παίρνουμε μια ΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Π.χ. Η παραπάνω σχέση επαληθεύεται αν $p(x) = 2/x$ και $q(x) = 1/x^2$.

- Θεωρούμε τη μη ομογενή γραμμική ΔΕ 2ης τάξης

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = \phi(x) \ . \tag{21}$$

Αλλάζοντας μεταβλητή ως

$$y(x) = u(x)p(x) \ ,$$

παίρνουμε

$$u'' + \left(2\frac{p'}{p} + f\right)u' + \frac{p'' + fp' + gp}{p}\,u = \frac{\phi}{p} \ .$$

  - Αν $p(x)$ είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης στην (21), τότε ο τελευταίος όρος στο αριστερό μέλος υποβιβάζοντας την τάξη της εξίσωσης, σε 1ης τάξης στην u'.
  - Αν εκλέξουμε

    $$p(x) = e^{-\frac{1}{2}\int dx f(x)} \ ,$$

    ο όρος u' απαλοίφεται και έχουμε εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με συχνότητα εξαρτόμενη απ΄ το x, καθώς και εξωτερική δύναμη.
    Αν αυτή μεταβάλλεται αργά μπορούμε να εφαρμόσουμε

ΔΕ 2ης τάξης και εξίσωση του *Schrödinger*

- Στην Κβαντική Μηχανική η μονοδιάστατη εξίσωση του Schrödinger για στατικά δυναμικά παίρνει τη μορφή

$$-\frac{d^2\Psi}{dz^2} + V\Psi = E\Psi \ , \tag{22}$$

  Απ΄ αυτήν μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τη μορφή της λύσης και του ενεργειακού φάσματος E ακόμα και αν δεν τη λύσουμε επακριβώς.

- Με κατάλληλους μετασχηματισμούς η γενική μορφή κάθε 2ης τάξης ΔΕ γράφεται ως

$$\frac{d}{dx}\left(f\frac{d\Phi}{dx}\right) + (Eh + p)\Phi = 0 \ , \tag{23}$$

  όπου f, h και p είναι συναρτήσεις του x και E σταθερά,

- Ορίζουμε
$$F = fh \ , \qquad H = \frac{f}{h}$$
και αλλάζουμε μεταβλητές ως
$$dx = H^{1/2} dz \ , \qquad \Phi = F^{-1/4}\Psi \ .$$
- Η (23) μετασχηματίζεται στην εξίσωση του Schrödinger (22) με δυναμικό
$$V = -\frac{p}{h} + F^{-1/4}\frac{d^2 F^{1/4}}{dz^2} = -\frac{p}{h} + \frac{H^{1/2}}{F^{1/4}}\frac{d}{dx}\left(H^{1/2}\frac{d}{dx}F^{1/4}\right)$$
και ενέργεια E. Το δυναμικό μπορεί να εκφρασθεί άμεσα ως συνάρτηση του z μόνο αν η ΔΕ
$$\frac{dx}{dz} = H^{1/2}(x) \ ,$$
μπορεί να επιλυθεί και η λύσης της να γραφτεί ως $x = x(z)$.

Γραμμικές ομογενείς ΔΕ n-οστής τάξης

Στη Φυσική γραμμικές ΔΕ της μορφής (2) παίζουν πρωτεύοντα ρόλο για την κατανόηση πραγματικών συστημάτων ή και ως πρώτη προσέγγιση στην αντιμετώπιση μή γραμμικών προβλήματων. Εξετάζουμε πρώτα την ομογενή εξίσωση

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(x)\frac{d^i y}{dx^i} = 0 \ , \tag{24}$$

- Υποθέτουμε ότι $a_0(x) \neq 0$ ταυτοτικά, άρα μπορούμε να θέσουμε $a_0(x) = 1$.
- Η λύση γραμμικών ΔΕ είναι μοναδική για ομαλές αρχικές συνθήκες για την y και τις παραγώγους της έως τάξης $n-1$.

- Η πιό γενική λύση της (24) είναι ο γραμμικός συνδυασμός n γραμμικώς ανεξαρτήτων λύσεων y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Δηλαδή

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \ . \tag{25}$$

Οι σταθερές c_i προσδιορίζονται απ' τις αρχικές συνθήκες.

- Σημαντικό ρόλο στην κατανόηση γραμμικών ΔΕ παίζει η Wronskian. Για n συναρτήσεις $y_i(x)$, είναι η ορίζουσα

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \ . \tag{26}$$

- Κάνοντας χρήση κανόνων παραγώγισης οριζουσών αποδεικνύεται ότι αν οι y_i επιλύουν την (24) ισχύει ότι

$$W(x) = W_0 e^{-\int a_1(x)dx} . \tag{27}$$

που είναι το θεώρημα του Liouville.

- Στην πράξη η σταθερά W_0 προσδιορίζεται απ΄ την ορίζουσα σε κάποια ασυμπτωτική περιοχή, όπου ο υπολογισμός της είναι εύκολος.
- Αν οποιεσδήποτε απ΄ τις y_i είναι γραμμικώς εξαρτημένες τότε $W = 0$. Επίσης, αν οι y_i είναι λύσεις της γραμμμικής ΔΕ (24) και $W = 0$, τότε αυτές είναι γραμμικώς εξαρτημένες.

- Εφαρμογή των παραπάνω σε 2ης τάξης ομογενής ΔΕ είναι ότι απ΄ τον ορισμό και το θεώρημα του Liouville έχουμε ότι

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' \sim e^{-\int a_1(x) dx} \ . \tag{28}$$

Άν έχουμε βρεί μια λύση (π.χ. την y_1) αμέσως με απλή ολοκλήρωση βρίσκουμε και την δεύτερη γραμμικώς ανεξάρτητη λύση (την y_2). Το αποτέλεσμα είναι

$$y_2(x) \sim y_1(x) \int^x dx' \frac{e^{-\int^{x'} a_1(x'') dx''}}{y_1^2(x')} \tag{29}$$

Γραμμικές μη ομογενείς ΔΕ n-οστής τάξης

Για την πιό γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(x)\frac{d^i y}{dx^i} = Q(x) \ , \tag{30}$$

προκύπτει αν απλώς προσθέτουμε μια μερική λύσης της $y_p(x)$ στη γενική λύση της ομογενούς με $Q(x) = 0$.

- Η πιο γενική και ασφαλής μέθοδος είναι η μέθοδος των μεταβαλλόμενων παραμέτρων. Γράφουμε

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x) y_i(x) \ , \tag{31}$$

όπου $y_i(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης. Ό σκοπός είναι να προσδιορίσουμε τους μή σταθερούς συντελεστές $v_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

- Αντικαθιστώντας στην (30) βρίσκουμε τελικά το σύστημα

$$\begin{aligned} & v_1' y_1 + v_2' y_2 + \cdots + v_n' y_n = 0 \ , \\ & v_1' y_1' + v_2' y_2' + \cdots + v_n' y_n' = 0 \ , \\ & \vdots \\ & v_1' y_1^{(n-2)} + v_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-2)} = 0 \ , \\ & v_1' y_1^{(n-1)} + v_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-1)} = Q(x) \ , \end{aligned} \tag{32}$$

  Το σύστημα για τις v_i' έχει μοναδική λύση γιατί η Wronskian του συστήματος $W \neq 0$.
- Η μέθοδος αυτή συνήθως απαιτεί αρκετές αλγεβρικές πράξεις και τελικά n απλές ολοκληρώσεις. Για αυτό, όπως θα δούμε, για γραμμικές ΔΕ με σταθερούς συντελεστές a_i έχουν αναπτυχθεί άλλες μέθοδοι.

Γραμμικές ΔΕ n-οστής τάξης με σταθερούς συντελεστές

- Αν οι συντελεστές $a_i(x)$ της ομογενούς ΔΕ (24) είναι σταθερές, τότε η γενική λύση της βρίσκεται αντικαθιστώντας την

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{m_i x} \tag{33}$$

και προσδιορίζοντας τα m_i ως λύσεις της

$$\sum_{i=1}^{n} a_{n-i} m^i = 0 \ . \tag{34}$$

- Το παραπάνω είναι σωστό αν όλες οι λύσεις είναι διαφορετικές. Αν μία λύση, π.χ. η m_1, εμφανίζεται $k \geqslant 2$ φορές τότε η (33) δεν είναι σωστή γιατί περέχει μόνο $n - k + 1 < n$ γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις.

- Παίρνοντας κατάλληλα όρια, κατά τα οποία οι ρίζες αυτές γίνονται τελικά ίσες, ότι τότε αντίστοιχοι k όροι στην (33) αντικαθίστανται από το

$$\left(\sum_{i=0}^{k-1} c_i x^i\right) e^{m_1 x} \ . \tag{35}$$

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε την απλούστερη των περιπτώσεων με $k = 2$. Ας υποθέσουμε ότι αρχικά οι αντίστοιχες ρίζες είναι διαφορετικές. Ο σχετικός όρος στη λύση είναι

$$c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \ .$$

- Έστω ότι $m_2 = m_1 + \epsilon$. Αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor για μικρό ϵ
$$(c_1 + c_2)e^{m_1 x} + c_2 x \epsilon e^{m_1 x} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \ .$$
- Αν θέσουμε $c_1 + c_2 \rightarrow c_1$ και κρατήσουμε σταθερό $c_2\epsilon \rightarrow c_2$ στο όριο $\epsilon \rightarrow 0$ παίρνουμε

$$(c_1 + c_2 x)e^{m_1 x} \ .$$

Άλλες μέθοδοι εύρεσης της μερικής λύσης: Για να βρούμε τη μερική λύση y_p μπορούμε φυσικά να χρησιμοποιήσουμε τη γενική μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων. Σε πολλές περιπτώσεις όμως είναι πρακτικότερη η χρήση άλλων πιό εύχρηστων μεθόδων ανάλογα με τη μορφή της συνάρτησης $Q(x)$ στην (30).

- Αν
$$Q(x) = e^{ax} p_N(x)(c_1 \sin\beta x + c_2 \cos\beta x) \ , \tag{36}$$
όπου $p_N(x)$ πολυώνυμο N-οστού βαθμού, δοκιμάζουμε τη λύση
$$y_p = e^{ax} \sin\beta x \sum_{i=0}^{N} b_i x^i + e^{ax} \cos\beta x \sum_{i=0}^{N} d_i x^i \ . \tag{37}$$
- Αντικαθιστώντας στην (30) δεν αναπαράγονται νέοι όροι. Οι διάφοροι συντελεστές βρίσκονται ώστε να ικανοποιείται η ΔΕ.

Ομαλά και ανώμαλα σημεία: Ορισμοί και ταξινόμιση

Σε πολλές περιπτώσεις χρειάζεται να βρούμε τη λύση μιας γραμμικής ΔΕ στη γειτονιά ενός σημείου με ανάπτυξή της σε απειροσειρά γύρω απ΄ αυτό. Η συμπεριφορά της λύσης εξαρτάται από αυτή των συντελεστών της ΔΕ στο σημείο αυτό.

- Θα επικεντρωθούμε σε γραμμικές ΔΕ 2ης τάξης

$$\frac{d^2Y}{dz^2} + p(z)\frac{dY}{dz} + q(z)Y = 0 \; . \tag{38}$$

  - Σε εφαρμογές η μεταβλητή z είναι συνήθως πραγματική, αλλά την επεκτείνουμε σε όλο το μιγαδικό επίπεδο.
  - Οι συναρτήσεις $p(z)$ και $q(z)$ είναι συνήθως πραγματικές.

Συνήθη σημεία: Ένα σημείο z_0 ονομάζεται σύνηθες της (38) αν οι $p(z)$ και $q(z)$ είναι αναλυτικές στο $z = z_0$ και στη γειτονιά του. Στα συνήθη σημεία η λύση της ΔΕ είναι μονότιμη και αναλυτική οπότε μπορεί να εκφρασθεί ως

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ . \tag{39}$$

Οι συντελεστές a_n προσδιορίζονται με:

- Αντικατάσταση στην (38).
- Με παράλληλη ανάπτυξη των $p(z)$ και $q(z)$ σε δυναμοσειρά και τελικά θέτοντας στο μηδέν τους συντελεστές των δυνάμεων του $z - z_0$.

Ανώμαλα σημεία: Ένα σημείο z_0 ονομάζεται ανώμαλο της (38) αν τουλάχιστον μία εκ των $p(z)$ και $q(z)$ είναι μή αναλυτική σε αυτό.
Υπάρχουν δύο ανεξάρτητες λύσεις:

- η πρώτη εκ των οποίων της μορφής

$$Y_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{40}$$

- και η δεύτερη:
  - Αν

$$\text{αν} \quad \rho_1 - \rho_2 \neq \text{μη}-\text{αρνητικός ακέραιος} = s\ , \tag{41}$$

τότε

$$Y_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n\ ,$$

- (συνέχεια)
  - $$\text{αν} \quad \rho_1 - \rho_2 = \text{μη}-\text{αρνητικός ακέραιος} = s \ , \qquad (42)$$

    τότε

    $$Y_2(z) = gY_1(z)\ln(z-z_0) + (z-z_0)^{\rho_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z-z_0)^n \ ,$$
- Οι συντελεστές $\rho_1, \rho_2, c_n, b_n, g$ προσδιορίζονται με αντικατάσταση στη ΔΕ και σύγκριση των δυνάμεων του $(z-z_0)^n$.
- Παρατηρείστε ότι γενικά η λύση δίνεται σε σειρά Laurent.

- Υπό συγκεκριμένες συνθήκες οι παραπάνω σειρές Laurent περιέχουν πεπερασμένο αριθμό όρων με αρνητικές δυνάμεις.
  - Τότε απειράθροισμα αρχίζει με τον όρο $n = 0$ καθότι η μικρότερη αρνητική δύναμη μπορεί να συνδυαστεί με τους παράγοντες $(z - z_0)^\rho$.
  - Αν $s = 0$ τότε το άθροισμα στην Y_2 μπορεί να αρχίζει με τον όρο $n = 1$.
- Λύσεις αυτού του είδους ονομάζονται ομαλές. Η απαραίτητη και αναγκαία συνθήκη για να έχουμε ομαλές λύσεις στη γειτονιά ενός σημείου $z = z_0$ είναι οι συναρτήσεις

$$(z - z_0)p(z) \quad \text{και} \quad (z - z_0)^2 q(z) \ , \tag{43}$$

  να είναι αναλυτικές στο $z = z_0$ και στη γειτονιά του.
- Ένα ανώμαλο σημείο που ικανοποιεί τη (43) ονομάζεται κανονικό ανώμαλο σημείο, ειδάλλως ουσιώδες ανώμαλο σημείο.

Συμπεριφορά στο άπειρο

Η συμπεριφορά στο $z = \infty$ χρήζει ιδιαίτερης αντιμετώπισης. Θέτοντας $t = 1/z$, αρκεί να μελετήσουμε τη συμπεριφορά στο $t = 0$. Τότε η (38) παίρνει την ίδια μορφή, αλλά με παραγώγους ως προς t και με τις συναρτήσεις $p(z)$ και $q(z)$ να αντικαθίστανται απ' τις

$$\tilde{p}(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}\, p\left(\frac{1}{t}\right) , \qquad \tilde{q}(t) = \frac{1}{t^4} q\left(\frac{1}{t}\right) . \tag{44}$$

- Ένα ανώμαλο σημείο στο άπειρο θα είναι κανονικό αν

$$zp(z) \quad \text{και} \quad z^2 q(z) \quad \text{είναι αναλυτικές στο } z \to \infty . \tag{45}$$

- Επίσης ένα σημείο στο άπειρο θα είναι σύνηθες αν

$$p(z) = \frac{2}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) , \qquad q(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^4}\right) . \tag{46}$$

Εξισώσεις τύπου *Fuchsian*

Μιά εξίσωση με όλα τα ανώμαλα σημεία της ομαλά ονομάζεται τύπου Fuchsian. Έστω ότι αυτά είναι στα σημεία $z = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ και $z = \infty$.

- Η γενική μορφή των συντελεστών είναι

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z - a_i} \ , \\ q(z) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{(z - a_i)^2} + \frac{C_i}{z - a_i} \ . \end{aligned} \tag{47}$$

- Επειδή $z = \infty$ είναι κανονικό ανώμαλο σημείο έχουμε απ΄ την (45), ότι

$$\sum_{i=1}^{n} C_i = 0 \ . \tag{48}$$

- Δεν μπορούμε να προσθέσουμε στο δεξί μέλος των (47) μια αναλυτική συνάρτηση $f(z)$.
    - Επειδή το $z = \infty$ είναι κανονικό ανώμαλο σημείο αυτή θα πρέπει να πλησιάζει το 0 στο $z = \infty$.
    - Όμως τότε απ΄ το θεώρημα του Liouville έχουμε $f(z) = 0$.
- Σε ένα κανονικό ανώμαλο σημείο οι παράμετροι της σειράς $\rho_{1,2}$ αποτελούν λύσεις της 2ο-βάθμιας εξίσωσης η οποία καθορίζεται απ΄ τους πιό ανώμαλους όρους της και ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση

$$\rho^2 + (A_i - 1)\rho + B_i = 0 \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ . \tag{49}$$

- Στο άπειρο η αντίστοιχη εξίσωση είναι

$$\rho^2 + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} A_i\right)\rho + \sum_{i=1}^{n} (B_i + a_i C_i) = 0 \ . \tag{50}$$

της οποίας οι λύσεις αναφέρονται στον εκθέτη του $t = 1/z$ στην μετασχηματισμένη εξίσωση.

Ισχύουν οι ακόλουθες γενικές παρατηρήσεις

- Το άθροισμα των ριζών των (49) και (50) είναι $n-1$.
- Αν $z=\infty$ είναι ένα σύνηθες σημείο τότε οι ακόλουθες συνθήκες πρέπει να υπακούονται:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} A_i = 2 \ , \\
&\sum_{i=1}^{n} C_i = 0 \ , \\
&\sum_{i=1}^{n} (B_i + a_i C_i) = 0 \ , \\
&\sum_{i=1}^{n} (2a_i B_i + a_i^2 C_i) = 0 \ .
\end{aligned} \tag{51}$$

ΔΕ με τρία ομαλά ανώμαλα σημεία

Η συνηθέστερη κατηγορία ΔΕ που εμφανίζεται σε φυσικά προβλήματα είναι αυτές με τρία ομαλά ανώμαλα σημεία.

- Έστω a, b, c τα σημεία αυτά τα οποία είναι διάφορα μεταξύ των και του απείρου το οποίο θεωρείται ότι είναι σύνηθες σημείο.
- Η ΔΕ είναι της μορφής

$$\begin{aligned} \frac{d^2Y}{dz^2} &+ \left[\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z-a} + \frac{1-\beta_1-\beta_2}{z-b} + \frac{1-\gamma_1-\gamma_2}{z-c}\right]\frac{dY}{dz} \\ &+ \left[\frac{\alpha_1\alpha_2(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta_1\beta_2(b-c)(b-a)}{z-b}\right. \\ &+ \left.\frac{\gamma_1\gamma_2(c-a)(c-b)}{z-c}\right]\frac{Y}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 0\ . \end{aligned} \tag{52}$$

- Οι εκθέτες των ανεξάρτητων λύσεων είναι (α_1, α_2), (β_1, β_2) και (γ_1, γ_2).

- Επειδή το άπειρο είναι σύνηθες σημείο έχουμε ότι

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \ . \tag{53}$$

- Αν κάνουμε το μετασχηματισμό

$$x = \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)} \ , \qquad Y(z) = \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta_1} F(x) \ , \tag{54}$$

τότε η συνάρτηση $F(x)$ ικανοποιεί την υπεργεωμετρική εξίσωση

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dF}{dx} - \alpha\beta F = 0 \ , \tag{55}$$

με παραμέτρους

$$\alpha = \gamma_1 + \alpha_1 + \beta_1 \ , \qquad \beta = \gamma_2 + \alpha_1 + \beta_1 \ , \qquad \gamma = 1 + \alpha_1 - \alpha_2 \ .$$

Αυτή έχει τρία ομαλά ανώμαλα σημεία, τα $z = 0, 1, \infty$, με αντίστοιχους εκθέτες $(0, 1-\gamma)$, $(0, \gamma - \alpha - \beta)$ και (α, β).

- Αν κάποια απ' τις παραμέτρους είναι άπειρη , π.χ. η $c = \infty$ τότε η (52) γίνεται

$$\frac{d^2Y}{dz^2} + \left[\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z-a} + \frac{1-\beta_1-\beta_2}{z-b}\right]\frac{dY}{dz} + \left[\frac{\alpha_1\alpha_2(a-b)}{z-a} + \frac{\beta_1\beta_2(b-a)}{z-b} + \gamma_1\gamma_2\right] \times \frac{Y}{(z-a)(z-b)} = 0 \ . \tag{56}$$

- Τότε έχουμε τρία ομαλά ανώμαλα σημεία a, b και ∞, δηλαδή το $z = \infty$ δεν είναι πιά σύνηθες σημείο.
- Το ανάλογο του μετασχηματισμού (54) που θα δώσει υπεργεωμετρική εξίσωση είναι

$$x = \frac{z-a}{b-a} \ , \qquad Y(z) = (z-a)^{\alpha_1}(z-b)^{\beta_1}F(x) \ . \tag{57}$$

- Οι συντελεστές της υπεργεωμετρικής εξίσωσης δίδονται από

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= \alpha_1+\beta_1-\alpha_2-\beta_2+1\ , \\ \alpha\beta &= \gamma_1\gamma_2+(\alpha_1+\beta_1)(1-\alpha_2-\beta_2)\ , \\ \gamma &= 1+\alpha_1-\alpha_2\ . \end{aligned} \tag{58}$$

- Η λύση παίρνει τη μορφή (55) αρκεί να ικανοποιείται η (53).
- Τα ζεύγη των χαρακτηριστικών εκθετών στα σημεία a, b και ∞ είναι (α_1, α_2), (β_1, β_2) και (γ_1, γ_2).

Συρρέουσα Υπεργεωμετρική εξίσωση

Όταν δύο ανώμαλα σημεία μιας ΔΕ πλησιάσουν και εντέλει ταυτιστούν το αποτέλεσμα είναι μια ΔΕ με ένα λιγότερο ανώμαλο σημείο, με ιδιότητες τυπικά πιό σύνθετες στο κοινό σημείο.
Η περίπτωση της υπεργεωμετρικής εξίσωσης (55) είναι τυπικό παράδειγμα. Έστω ότι:

- Κάνουμε την αλλαγή $x \to x/\beta$ και διαιρούμε την (55) με β.
- Παίρνουμε το όριο $\beta \to \infty$.

Το αποτέλεσμα είναι:

$$x\frac{d^2Y}{dx^2} + (\gamma - x)\frac{dY}{dx} - \alpha Y = 0 \ , \tag{59}$$

που είναι η συρρέουσα υπεγεωμετρική εξίσωση.

Αυτή έχει:

- Ένα κανονικό ανώμαλο σημείο στο $x = 0$, ίδιο με αυτό της αρχικής εξίσωσης, με εκθέτες, απ' την (49), τους $\rho = 0$ και $1 - \gamma$.
- Ένα μη κανονικό σημείο στο $x = \infty$, ως αποτέλεσμα του ορίου, των δύο αρχικών συνήθων ανώμαλων σημείων για $x = 1, \infty$.
- Η υπεργεωμετρική και η συρρέουσα υπεργεωμετρική εξίσωση αντιστοιχούν, με κατάλληλες εκλογές των παραμέτρων σε πολλές γνωστές ΔΕ, π.χ. Legendre, Jacobi, Hermite, Laguerre, κλπ.

Παράδειγμα 1ο

Θα βρούμε τη γενική λύση της ΔΕ

$$(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=(1-x)^2\ , \qquad y=y(x)\ . \tag{60}$$

Λύση: Γράφουμε την ΔΕ στην μορφή

$$y''+f(x)y'+g(x)y=\phi(x)\ , \tag{61}$$

με

$$f(x)=\frac{x}{1-x}\ , \qquad g(x)=\frac{1}{x-1}\ , \qquad \phi(x)=1-x\ .$$

Η $y=x$ αποτελεί λύση της ομογενούς ΔΕ. Επομένως, η αλλαγή μεταβλητής

$$y(x)=xv(x)\ ,$$

οδηγεί στην 1ης τάξης ως πρός την παράγωγο $v'(x)$

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{1-x}\right)\frac{dv}{dx}=\frac{1}{x}-1\ .$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ολοκληρωτικών παραγόντων

$$\frac{dv}{dx} = c\frac{1-x}{x^2}e^x + \frac{x^2-1}{x^2} \ ,$$

όπου c σταθερά. Με απλή ολοκλήρωση

$$y(x) = -ce^x + c_1 x + x^2 + 1 \ , \tag{62}$$

όπου c_1 η δεύτερη σταθερά ολοκλήρωσης.
Οι ενδιάμεσα υπολογισμοί αφήνονται ώς [Άσκηση].

Παράδειγμα 2ο

Θα βρούμε τη γενική λύση της ΔΕ

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+n^2xy=\sin\omega x\ , \qquad y=y(x)\ . \tag{63}$$

όπου ω και n είναι πραγματικές σταθερές.
Λύση: Γράφουμε τη ΔΕ στη μορφή (61) με

$$f(x)=\frac{2}{x}\ , \qquad g(x)=n^2\ , \qquad \phi(x)=\frac{\sin\omega x}{x}\ .$$

Η αλλαγή

$$y(x)=\frac{v(x)}{x}\ ,$$

οδηγεί στην

$$\frac{d^2v}{dx^2}+n^2v=\sin\omega x\ .$$

Η λύση της ομογενούς v_h είναι προφανής και η μερική λύση είναι

$$v_p(x) = \frac{\sin \omega x}{n^2 - \omega^2} \ , \tag{64}$$

αν $\omega \neq n$ και

$$v_p(x) = -\frac{x \cos nx}{2n} \ , \tag{65}$$

αν $\omega = n$. Η γενική λύση δίνεται από το άθροισμα $v = v_h + v_p$. Οι ενδιάμεσα υπολογισμοί αφήνονται ώς [Άσκηση].

Παράδειγμα 3ο

Θεωρούμε τη ΔΕ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} , \qquad y = y(x) . \tag{66}$$

Βρείτε μερικούς όρους μιας προσεγγιστικής λύσης που να εκφράζει την $y(x)$ για $x \gg 1$.

Λύση:

- Υποθέτοντας ότι η $y(x)$ παραμένει πεπερασμένη για $x \gg 1$, μπορούμε γράψουμε προσσεγγιστικά

$$\frac{d^2y}{dx^2} \simeq \frac{1}{x^4} \quad \Longrightarrow \quad y(x) \simeq \frac{1/6}{x^2} .$$

Εκ΄ του αποτελέσματος, η υπόθεση ήταν σωστή.

- Για να υπολογίσουμε διορθώσεις γράφουμε

$$y(x) = \frac{1/6}{x^2} + h(x) \ ,$$

όπου η συνάρτηση $h(x) \ll 1/x^2$ για $x \gg 1$.

- Αντικαθιστούμε στη ΔΕ και αναπτύσουμε σε σειρά Taylor παίρνοντας

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{18x^{10}} + h''\right) + \left(-\frac{1}{432x^{16}} + \frac{2h}{3x^8}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{11664x^{22}} - \frac{h}{18x^{14}} + \frac{2h^2}{x^6}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{28}}\right) \ . \end{aligned}$$

- Η h θα είναι άθροισμα όρων αντίστροφων δυνάμεων του x με ανάπτυξη της μορφής

$$h(x) = \frac{a_1}{x^8} + \frac{a_2}{x^{14}} + \frac{a_3}{x^{20}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{26}}\right) \ .$$

- Αντικαθιστώντας βρίσκουμε το αλγεβρικό σύστημα

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^{10}}: &\qquad \frac{1}{18} + 72a_1 = 0 \ , \\
\frac{1}{x^{16}}: &\qquad -\frac{1}{432} + \frac{2a_1}{3} + 210a_2 = 0 \ , \\
\frac{1}{x^{22}}: &\qquad \frac{1}{11664} - \frac{a_1}{18} + 2a_1^2 + \frac{2a_2}{3} + 420a_3 = 0 \ ,
\end{aligned}
$$

η λύση του οποίου είναι

$$
a_1 = -\frac{1}{1296} \ , \qquad a_2 = \frac{11}{816480} \ , \qquad a_3 = -\frac{4079}{12345177600} \ .
$$

Παράδειγμα 4ο

Θεωρούμε τη ΔΕ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y^2 - e^{2y} , \qquad y = y(x) . \tag{67}$$

- Εντοπίστε την περιοχή στην οποία η λύση της (67) είναι αρμονική ταλάντωση και δείξτε ότι η απάντηση ανάγεται στη λύση της υπερβατικής εξίσωσης

$$a^2 = e^{2a} . \tag{68}$$

  Δικαιολογήστε ότι η μοναδική λύση της τελευταίας είναι τέτοια ώστε $-1 < a < 0$.
- Δείξτε ότι η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων κοντά στην περιοχή αυτή είναι

$$\omega^2 = 2(a-1)a . \tag{69}$$

Λύση:

- Γύρω από ένα σημείο ισορροπίας $y = a$ η παράγωγος της y είναι μηδέν. Άρα προκύπτει η (68). Από αυτή παίρνουμε δύο λύσεις διότι $e^a = \pm a$:
    - Επειδή η συνάρτηση $f_+(a) = e^a - a$ έχει ελάχιστο 1 στο $a = 0$, είναι αδύνατο να ικανοποιήσουμε την $f_+ = 0$.
    - Η $f_-(a) = e^a + a$ είναι μονοτόνως αύξουσα και έχουμε $f_-(0) = 1$ και $f_-(-1) = -1 + 1/e > -1$. Άρα προκύπτει η ανισότητα $-1 < a < 0$.
    - Η αριθμητική λύση της $e^a + a = 0$ είναι $a \simeq -0.567$.
- Θέτουμε

$$z = a + q(x) \ , \qquad q(x) \ll a \ , \quad \forall\ x \ ,$$

αντικαθιστούμε και αναπτύσουμε σε σειρά Taylor κρατώντας τον γραμμικό όρο στο $q(x)$.

- Βρίσκουμε την ΔΕ

$$\frac{d^2q}{dx^2} + 2a(a-1)q = 0 ,$$

που περιγράφει αρμονικές ταλαντώσεις, από την οποία προκύπτει η ζητούμενη συχνότητα.
Είναι δε θετική λόγω της ανισότητας $-1 < a < 0$ και αριθμητικά $\omega \simeq 1.333$.

- Γενικότερα άν το δεξί μέλος της ΔΕ (67) είχε μια συνάρτηση $f(y)$, τότε:
  - Το a θα δινόταν από την $f(a) = 0$ και $\omega^2 = -f'(a)$.
  - Θα είχαμε αρμονική κίνηση και ευστάθεια μόνο αν $f'(a) < 0$.
  - Στην αντίθετη περίπτωση η λύση στο σημείο $z = a$ κρίνεται ως ασταθής διότι η διαταραχή $q(x)$ αυξάνεται με το x.

Παράδειγμα 5ο

Βρείτε τη λύση της ΔΕ Riccati

$$\frac{x}{2}\, y' + xy^2 + y = 1 \ , \qquad y = y(x) \ , \quad x \geqslant 0 \tag{70}$$

και μελετήστε τη συμπεριφορά της.

Λύση:

- Αντικαταθιστούμε όπου

$$y = \frac{z'}{2z} \ , \qquad z = z(x) \ ,$$

οπότε έχουμε τη ΔΕ

$$xz'' + 2z' - 4z = 0 \ .$$

- Θεωρούμε κατόπιν το μετασχηματισμό

$$z(x) = x^{\alpha} f(\eta) \ , \qquad \eta = \gamma x^{\beta}$$

και προσδιορίζουμε τις σταθερές α, β και γ έτσι ώστε η $f(\eta)$ να ικανοποιεί μια γνωστή, εάν δυνατόν, ΔΕ.

- Έχουμε για τις παραγώγους

$$z' = \alpha x^{\alpha-1} f + \beta\gamma x^{\alpha+\beta-1} \dot{f} \ ,$$

και

$$\begin{aligned} z'' &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} f + \beta\gamma(2\alpha+\beta-1)x^{\alpha+\beta-2}\dot{f} \\ &\quad + \beta^2\gamma^2 x^{\alpha+2\beta-2}\ddot{f} \ , \end{aligned}$$

όπου η τελεία παριστάνει παραγώγιση ως προς η.

- Τότε η (71) γράφεται

$$\beta^2\gamma^2 x^{2\beta}\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \beta\gamma(2\alpha+\beta+1)x^{\beta}\frac{df}{d\eta} + (\alpha^2+\alpha-4x)f = 0 \ .$$

- Συγκρίνοντας με την ΔΕ τροποποιημένης Bessel 1ης τάξης

$$\eta^2 \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \eta \frac{df}{d\eta} - (\eta^2 + 1) f = 0 ,$$

παίρνουμε

$$\alpha = -\frac{1}{2} , \qquad \beta = \frac{1}{2} , \qquad \gamma = 4 .$$

- Άρα η γενική λύση για την $z(x)$ είναι

$$z(x) = x^{-1/2} \left[c_1 I_1(4\sqrt{x}) + c_2 K_1(4\sqrt{x}) \right] ,$$

- Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες

$$\begin{aligned} I_1'(4\sqrt{x}) &= \frac{1}{4\sqrt{x}} I_1(4\sqrt{x}) + I_2(4\sqrt{x}) , \\ K_1'(4\sqrt{x}) &= \frac{1}{4\sqrt{x}} K_1(4\sqrt{x}) - K_2(4\sqrt{x}) , \end{aligned}$$

βρίσκουμε ότι η γενική λύση της (70) είναι

$$y(x) = x^{-1/2} \frac{I_2(4\sqrt{x}) - cK_2(4\sqrt{x})}{I_1(4\sqrt{x}) + cK_1(4\sqrt{x})} ,$$

- Λόγω του ότι

$$I_{1,2}(\eta) \sim \eta^{1,2} , \quad K_{1,2}(\eta) \sim \frac{1}{\eta^{1,2}} , \qquad \text{όταν} \quad \eta \to 0 ,$$

πρέπει $c = 0$ για να είναι η λύση πεπερασμένη στο $x = 0$.

- Άρα καλώς συμπεριφερόμενη λύση είναι

$$y(x) = x^{-1/2} \frac{I_2(4\sqrt{x})}{I_1(4\sqrt{x})} . \tag{71}$$

Έχουμε τη συμπεριφορά:

  - Για μικρά x

$$y(x) \simeq 1 - \frac{2x}{3} + \mathcal{O}(x^2) ,$$

  - Επίσης λόγω του ότι $I_{1,2}(\eta) \sim e^{\eta}/\sqrt{2\pi\eta}$, για $\eta \gg 1$,

$$y(x) \simeq x^{-1/2} \to 0 , \qquad \text{όταν} \quad x \to \infty .$$